Défis Première Spé maths : variations **Thiaude P.**

Défi SECDEG 01 **Le potager rectangulaire**

On doit délimiter un potager rectangulaire $ABCD$ et le clôturer sur ses quatre côtés : on dispose pour cela de matériaux permettant de construire au total 20 mètres de clôture : $AB + BC + CD + DA = 20$. On pose : $AB = x$.

1. Exprimer l'aire $f(x)$ du potager uniquement en fonction de x.

2. Pourquoi doit-on étudier f sur l'intervalle $[0; 10]$ uniquement ?

3. Dresser le tableau de variation de f sur $[0; 10]$, en déduire la distance AB pour laquelle l'aire du potager est maximale.

Corrigé

1. Posons $y = AD$.
On dispose de 20 m de clôture et elle sera entièrement utilisée donc :
$2x + 2y = 20$, autrement dit : $x + y = 10$, ou encore : $y = 10 - x$.
L'aire $f(x)$ du rectangle $ABCD$ est :
$$f(x) = AB \times AD = x \times (10 - x) = 10x - x^2 = -x^2 + 10x$$

2. On a d'une part $AB \geqslant 0$, autrement dit $x \geqslant 0$.
D'autre part $AD \geqslant 0$, qui s'écrit $y \geqslant 0$, autrement dit : $10 - x \geqslant 0$,
qui s'écrit aussi : $x \leqslant 10$.
Résumons : $0 \leqslant x$ et $x \leqslant 10$, autrement dit $x \in [0; 10]$.

3. Pour tout $x \in [0\,; 10]$, $f(x) = -x^2 + 10x$.
$-x^2 + 10x$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = -1$, $b = 10$ et $c = 0$.
On a :
$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-10}{2(-1)} = +\frac{10}{2} = 5$$
$a = -1$, $a < 0$ donc :
$f \nearrow$ sur $[0\,; \alpha]$ c'est-à-dire $[0; 5]$ et $f \searrow$ sur $[\alpha\,; 10]$ c'est-à-dire $[5\,; 10]$.

On a :
$$f(0) = -(0)^2 + 10(0) = 0$$
$$f(5) = -(5)^2 + 10(5) = -25 + 50 = 25$$
$$f(10) = -(10)^2 + 10(10) = -100 + 100 = 0$$

On obtient finalement le tableau de variation :

x	0	$\alpha = 5$	10
sens de variation de f	0 $\nearrow$	$\beta = 25$	$\searrow$ 0

L'aire maximale est $25\ m^2$, atteinte pour $AB = 5\ m$.

On alors $y = 10 - 5 = 5$, le potager d'aire maximale est un carré de côté 5 m.

Défi SECDEG 02 **Le ballon de foot**

L'unité de distance est le mètre, on admet que la trajectoire d'un ballon de foot dans un repère orthonormé dont l'axe des abscisses est au niveau du sol, l'axe des ordonnées est vertical, l'origine du repère est la position du ballon lors de l'impact avec le pied, admet pour équation $y = -0{,}05x^2 + 2{,}4x$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $f(x) = -0{,}05x^2 + 2{,}4x$.

1. Déterminer le maximum de f puis indiquer ce que représente ce nombre dans le contexte de l'exercice.

2. Déterminer la solution strictement positive de l'équation $f(x) = 0$ puis indiquer ce que représente ce nombre dans le contexte de l'exercice.

Corrigé

1. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -0{,}05x^2 + 2{,}4x$
$-0{,}05x^2 + 2{,}4x$ est de la forme $ax^2 + bx + c$avec $a = -0{,}05$, $b = 2{,}4$ et $c = 0$. On a :
$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-2{,}4}{2 \times (-0{,}05)} = \frac{-2{,}4}{-0{,}1} = 24$$
$a = -0{,}05$, $a < 0$ donc :
$f \nearrow$ sur $]-\infty; \alpha]$ i.e. sur $]-\infty; 24]$, $f \searrow$ sur $[\alpha; +\infty[$ i.e. sur $[\alpha; +\infty[$
$\beta = f(\alpha) = f(24) = 28{,}8$
On obtient le tableau de variation :

x	$-\infty$	$\alpha = 24$	$+\infty$
Sens de variation de f	$\nearrow$	$\beta = 28{,}8$	$\searrow$

Le maximum de f est 28,8 et il est atteint en $x = 24$.
L'altitude maximale du ballon est 28,8 m.

2. Avec les notation de l'exercice, on a les équivalences :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -0{,}05x^2 + 2{,}4x = 0 \Leftrightarrow x(-0{,}05x + 2{,}4) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \ ou - 0{,}05x + 2{,}4 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ ou \ 0{,}05x = 2{,}4$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \ ou \ x = \frac{2{,}4}{0{,}05} \Leftrightarrow x = 0 \ ou \ x = 48$$

L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive : 48.
La ballon retombe sur le sol à 48 m de son point de départ.

Défi SECDEG 03 Optimiser la recette d'un théâtre

Un directeur de théâtre dispose d'une salle dans laquelle toutes les places sont proposées au même prix, et il constate que :

- lorsque le prix de la place est fixé à 20€ alors il peut espérer 130 spectateurs
- toute augmentation de 1€ du prix de la place fait baisser de 10 le nombre de spectateurs, et réciproquement que toute baisse de 1€ du prix de la place amène 10 spectateurs supplémentaires : le nombre de spectateurs est donc une fonction affine du prix de la place.

Le prix de la place peut ne pas être un nombre entier d'euros.
Quel doit être le prix de la place pour que la recette soit maximale et que vaut cette recette maximale ?

Corrigé

Pour un prix de la place de x euros, notons $N(x)$ le nombre de spectateurs et $R(x)$ la recette en €.
Avec les indications de l'énoncé, **les variations de $N(x)$ sont proportionnelles aux variations de x** donc **$N(x)$ est une fonction affine de x** par conséquent il existe deux constantes a et b telles que $N(x) = ax + b$.
Or :
• pour $x = 20$ il y a 130 spectateurs, donc $N(20) = 130$ ce qui donne $20a + b = 130$.
• pour $x = 21$ on aura 10 spectateurs de moins soit 120 spectateurs, donc $N(21) = 120$, autrement dit : $21a + b = 120$.

On a les équivalences :

$$\begin{cases} 20a + b = 130 \\ 21a + b = 120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 130 - 20a \\ 21a + 130 - 20a = 120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 130 - 20a \\ a = -10 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 130 + 200 \\ a = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 330 \\ a = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -10 \\ b = 330 \end{cases}$$

On a donc : $N(x) = -10x + 330$.
Le nombre de spectateur est nécessairement positif ou nul donc :

$$-10x + 330 \geqslant 0 \Leftrightarrow -10x \geqslant -330$$

En divisant par -10 qui est strictement négatif, on obtient :

$$\frac{-10x}{-10} \leqslant \frac{-330}{-10} \Leftrightarrow x \leqslant 33$$

Il faut donc que $0 \leqslant x \leqslant 33$.

On a : recette $=$ prix de la place $\times$ nombre de spectateurs, donc pour tout $x \in [0; 33]$, on a : $R(x) = x \times (-10x + 330) = -10x^2 + 330\,x$.
$-10x^2 + 330\,x$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = -10$, $b = 330$ et $c = 0$,

On a :

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-330}{2(-10)} = \frac{33 \times 10}{2 \times 10} = \frac{33}{2} = 16{,}5$$

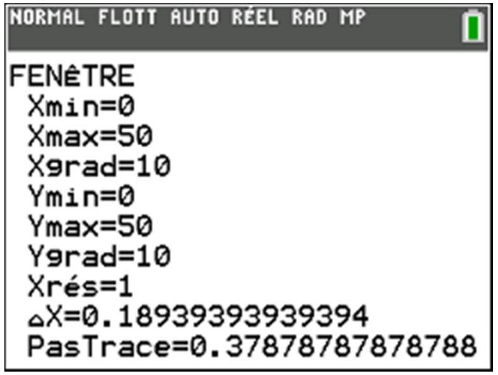
$a = -10$, $a < 0$ donc :
$R \nearrow$ sur $[0; \alpha]$ i.e. sur $[0; 16{,}5]$ et $R \searrow$ sur $[\alpha; 33]$ i.e. sur $[16{,}5\,; 33]$.
On a :

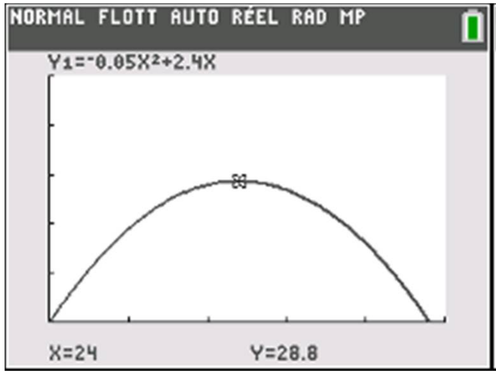
$$R(0) = -10(0)^2 + 330(0) = 0$$
$$R(16{,}5) = -10(16{,}5)^2 + 330(16{,}5) = 2\,722{,}5$$
$$R(33) = 0$$

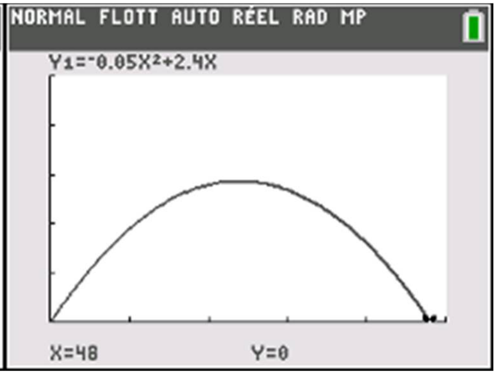
On obtient finalement le tableau de variation :

x	0	$\alpha = 16{,}5$	33
sens de variation de R	0 $\nearrow$	$\beta = 2\,722{,}5$	$\searrow$ 0

La recette maximale est $2\,722{,}5$ €, elle sera atteinte pour un prix de la place fixé à $16{,}5$€.

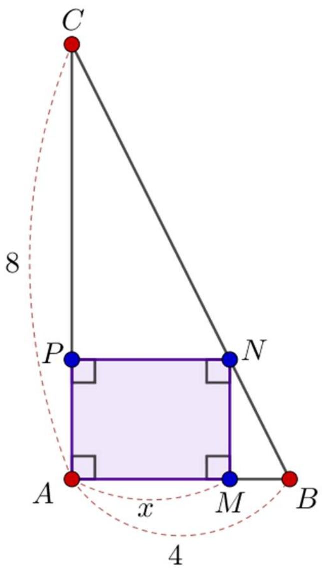






Défi SECDEG 04 **Optimiser la recette d'un théâtre**

ABC est un triangle rectangle en A tel que :
$AB = 4$, $AC = 8$.
Pour tout $x \in [0;4]$, on note : M le point de $[AB]$, tel que $AM = x$, N et P les points de $[BC]$ et $[AC]$ respectivement tels que $AMNP$ est un rectangle,
$f(x)$ l'aire du rectangle $AMNP$.



1. Justifier que $(MN) /\!/ (AC)$, en déduire que :
$$MN = 8 - 2x.$$
2. Montrer que, pour tout $x \in [0;4]$:
$$f(x) = -2x^2 + 8x$$
3. Étudier le sens de variation de f sur $[0;4]$, en déduire quelle est l'aire maximale de $AMNP$ ainsi que la valeur de x permettant de l'atteindre.
Que peut-on alors dire de M ?
4. Pour quelles valeurs de x l'aire de $AMNP$ est-elle supérieure ou égale à 6 ?

Corrigé

1. **Justifier que $(MN) /\!/ (AC)$, en déduire que : $MN = 8 - 2x$.**
On sait que $(MN) \perp (AB)$ et $(AC) \perp (AC)$.
On utilise : « si deux droites sont perpendiculaire à une même troisième, alors elles sont parallèles ».
On en déduit que $(MN) /\!/ (AC)$.

On sait que B, M, A sont alignés, B, N, C sont alignés, $(MN) /\!/ (AC)$.
On utilise le théorème de Thalès.
On en déduit que :
$$\frac{BM}{BA} = \frac{BN}{BC} = \frac{MN}{AC}$$
d'où :
$$\frac{BM}{BA} = \frac{MN}{AC}$$
$$\frac{4-x}{4} = \frac{MN}{8}$$
$$\frac{4-x}{4} \times 8 = MN$$
$$MN = 8 \times \frac{4-x}{4}$$
$$MN = 2(4-x)$$
$$MN = 8 - 2x$$

2. **Montrer que, pour tout $x \in [0;4]$: $f(x) = -2x^2 + 8x$.**
$AMNP$ est un rectangle donc : $\mathcal{A}_{AMNP} = AM \times AP$.
Or, $AM = x$ et $AP = AC - AP = AC - MN = 8 - x$.
Donc : $\mathcal{A}_{AMNP} = x \times (8 - 2x) = 8x - 2x^2 = -2x^2 + 8x$.
Comme $f(x) = \mathcal{A}_{AMNP}$ on a bien : $\forall x \in [0;4], f(x) = -2x^2 + 8x$.

3. **• sens de variation de f sur $[0;4]$**
$-2x^2 + 8x$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = -2, b = 8$ et $c = 0$.
On a :

$$\alpha=\frac{-b}{2a}=\frac{-8}{2(-2)}=\frac{-8}{-4}=2$$
$$\beta=f(\alpha)=-2(2)^2+8(2)=-2\times4+16=-8+16=8$$

$a=-2, a<0$ donc :

$f\nearrow$ sur $[0;\alpha]$ i.e. sur $[0;2]$ et $f\searrow$ sur $[\alpha;4]$ i.e. sur $[2;4]$.

On a :

$$f(0)-2(0)^2+8(0)=0$$
$$f(4)=-2(4)^2+8(4)=-2\times16+32=-32+32=0$$

On obtient finalement le tableau de variation :

x	0		$\alpha=2$		4
Sens de variation de f	0	$\nearrow$	$\beta=8$	$\searrow$	0

• **maximum de f sur $[0;4]$**

Le tableau de variation montre que le maximum de f sur $[0;4]$ est 8, atteint pour $x=2$.

• **aire maximale de $AMNP$**

Comme $f(x)$ est l'aire du rectangle $AMNP$, on en déduit que l'aire maximale de ce rectangle est 8, atteinte pour $x=2$.

Pour cette valeur de x, on a :

$$AM=2=\frac{1}{2}\times4=\frac{1}{2}\times AB$$

et comme $M\in[AB]$, on en déduit que M est le milieu de $[AB]$.

Autrement dit l'aire du rectangle $AMNP$ est maximale lorsque M est le milieu de $[AB]$.

4. Pour quelles valeurs de x l'aire de $AMNP$ est-elle supérieure ou égale à 6 ?

Il s'agit de résoudre dans $[0;4]$ l'inéquation $f(x)\geqslant6$:

$$-2x^2+8x\geqslant6\Leftrightarrow-2x^2+8x-6\geqslant0$$

$-2x^2+8x-6$ est de la forme ax^2+bx+c avec $a=-2$, $b=8$ et $c=-6$,

de discriminant : $\Delta=b^2-4ac=8^2-4(-2)(-6)=64-48=16$.

$\Delta>0$ donc l'expression admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-8-\sqrt{16}}{2(-2)}=\frac{-8-4}{-4}=\frac{-12}{-4}=3$$
$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-8+\sqrt{16}}{2(-2)}=\frac{-8+4}{-4}=\frac{-4}{-4}=1$$

Règle : « ax^2+bx+c est du signe de a à l'extérieur des racines ».

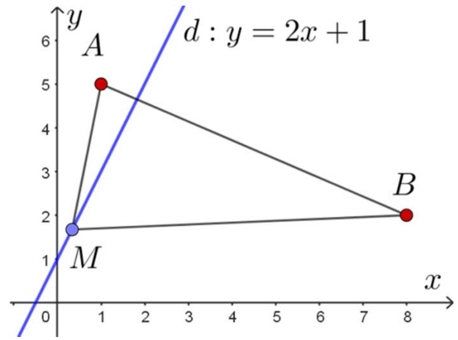
On obtient le tableau de signes :

x	0		1		3		4
Signe de $-2x^2+8x-6$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On souhaite que : $-2x^2+8x-6\geqslant0$, le tableau de signes donne alors pour ensemble des solutions : $[1;3]$.

L'aire de $AMNP$ est supérieure ou égale à 6 pour $x\in[1;3]$.

Défi 25 Dans un repère orthonormé on note d la droite d'équation $y=2x+1$, on considère $A(1;5)$ et $B(8;2)$ et on note M un point variable de d.



1. Calculer AB^2.
2. Montrer que, si on note x_M l'abscisse de M, alors, avec les notations de l'exercice on a l'équivalence : ABM est rectangle en $M\Leftrightarrow5x_M^2-19x_M+12=0$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $5x^2-19x+12=0$. En déduire pour quelles positions M_1 et M_2 de M le triangle ABM est rectangle en M (donner les coordonnées de ces deux points).

Corrigé

1. $A(1;5)$ $B(8;2)$

Le repère est orthonormé donc on peut utiliser la formule de la distance :

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(8-1)^2+(2-5)^2}=\sqrt{49+9}$$
$$=\sqrt{58}$$

donc : $AB^2=\left(\sqrt{58}\right)^2=58$.

2. $M \in d: y = 2x + 1$ donc $y_M = 2x_M + 1$.

On a donc $M(x_M; 2x_M + 1)$.

$AM = \sqrt{(x_M - 1)^2 + (2x_M + 1 - 5)^2}$

$AM^2 = (x_M - 1)^2 + (2x_M - 4)^2 = x_M^2 - 2x_M + 1 + 4x_M^2 - 16x_M + 16$

$AM^2 = 5x_M^2 - 18x_M + 17$

$BM = \sqrt{(x_M - 8)^2 + (2x_M + 1 - 2)^2}$

$BM^2 = (x_M - 8)^2 + (2x_M - 1)^2 = x_M{}^2 - 16x_M + 64 + 4x_M^2 - 4x_M + 1$

$BM^2 = 5x_M^2 - 20x_M + 65$

Avec les notations de l'exercice, on a les équivalences :

ABM est rectangle en M

$\Leftrightarrow AB^2 = AM^2 + MB^2$ (Pythagore)

$\Leftrightarrow AM^2 + BM^2 - AB^2 = 0$

$\Leftrightarrow 5x_M^2 - 18x_M + 17 + 5x_M^2 - 20x_M + 65 - 58 = 0$

$\Leftrightarrow 10x_M{}^2 - 38x_M + 24 = 0$

$\Leftrightarrow 2(5x_M^2 - 19x_M + 12) = 0$

$\Leftrightarrow 5x_M^2 - 19x_M + 12 = 0$

Avec les notations de l'exercice on a donc bien l'équivalence :

ABM est rectangle en $M \Leftrightarrow 5x_M^2 - 19x_M + 12 = 0$.

3. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $5x^2 - 19x + 12 = 0$.

$5x^2 - 19x + 12$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 5$, $b = -19$ et $c = 12$, de discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = (-19)^2 - 4(5)(12) = 121$

$\Delta > 0$ donc il y a deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+19 - \sqrt{121}}{2(5)} = \frac{19 - 11}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+19 + \sqrt{121}}{2(5)} = \frac{19 + 11}{10} = \frac{30}{10} = 3$$

Les solutions dans $\mathbb{R}$ de $5x^2 - 19x + 12 = 0$ sont : 0,8 et 3.

4. Si $x_M = 0{,}8$

$y_M = 2x_M + 1 = 2 \times 0{,}8 + 1 = 1{,}6 + 1 = 2{,}6$

Si $x_M = 3$

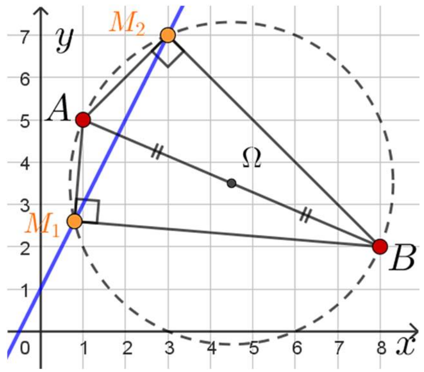
$y_M = 2x_M + 1 = 2(3) + 1 = 7$

Conclusion

Deux positions de M répondent à la question : $\boldsymbol{M_1(0{,}8\,;2{,}6)}$ et $\boldsymbol{M_2(3\,;7)}$.

Complément

On peut construire à la règle et au compas ces deux points : ce sont les points d'intersection de la droite d
et du cercle dont un diamètre est $[AB]$.



INEQUATIONS

Défi 11 Résoudre l'inéquation : $x(-x+4) < (2x-1)^2 + 2$.

Corrigé

On a les équivalences :

$$x(-x+4) < (2x-1)^2 + 2 \Leftrightarrow -x^2 + 4x < (2x)^2 - 2(2x)(1) + (1)^2 + 2$$
$$\Leftrightarrow -x^2 + 4x < 4x^2 - 4x + 1 + 2 \Leftrightarrow -x^2 - 4x^2 + 4x + 4x - 1 - 2 < 0$$
$$\Leftrightarrow -5x^2 + 8x - 3 < 0$$

$-5x^2 + 8x - 3$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = -5$, $b = 8$, $c = -3$,
de discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = (8)^2 - 4(-5)(-3) = 64 - 60 = 4$

$\Delta > 0$ donc l'expression admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8-\sqrt{4}}{2(-5)} = \frac{-8-2}{-10} = \frac{-10}{-10} = 1$$
$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8+\sqrt{4}}{2(-5)} = \frac{-8+2}{-10} = \frac{-6}{-10} = \frac{3}{5}$$

Règle (valable lorsqu'il y a deux racines)

« $ax^2 + bx + c$ est du signe de a à l'extérieur des racines »

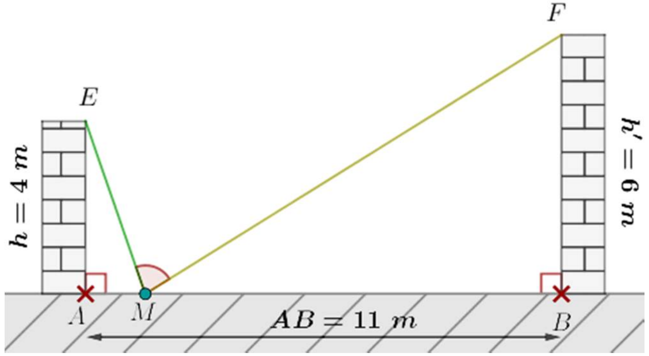
On obtient donc le tableau de signes :

x	$-\infty$		$\frac{3}{5}$		1		$+\infty$
Signe de $-5x^2 + 8x - 3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions de $-5x^2 + 8x - 3 < 0$ est $\left]-\infty\,;\,\frac{3}{5}\right[\cup \left]1\,;\,+\infty\right[$ et c'est aussi l'ensemble des solutions de l'inéquation de départ.

1	x(-x+4)<(2x-1)²+2
	Résoudre: $\left\{x < \frac{3}{5}, x > 1\right\}$

Défi 10 **thiaude©**Le point M est un point variable du segment [AB] :



Pour quelle valeur de la distance AM les droites (ME) et (MF) sont-elles perpendiculaires ? Corrigé en classe

Défi 13 On munit le plan d'un repère orthogonal. La parabole représentative de $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ coupe l'axe des abscisses en $E(3\,;0)$ et $F(7\,;0)$.
On précise que $A(1\,;\,-6)$ appartient à cette parabole. Déterminer a, b et c.

Corrigé

On va d'abord chercher une forme factorisée de $f(x)$, en déduire la forme développée qui permettra l'identification des coefficients a,b et c.

Notons $\mathcal{P}$ la parabole représentative de f dans le repère orthogonal : $\mathcal{P}$ coupe l'axe des abscisses en deux points, E et F, d'abscisses respectives 3 et 7, autrement dit l'équation $f(x) = 0$ admet pour solutions : 3 et 7, par conséquent pour tout réel x : $f(x) = a(x-3)(x-7)$.
Or, $f(1) = -6$ donc : $a(1-3)(1-7) = -6$, qui s'écrit : $a \times (-2) \times (-6) = -6$
ou encore : $a = \frac{-6}{(-2)\times(-6)}$, soit finalement : $a = -\frac{1}{2}$.

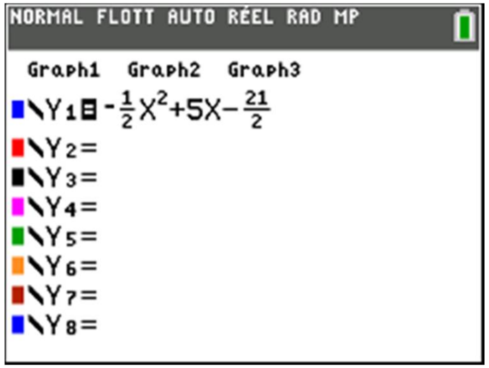
On a donc :

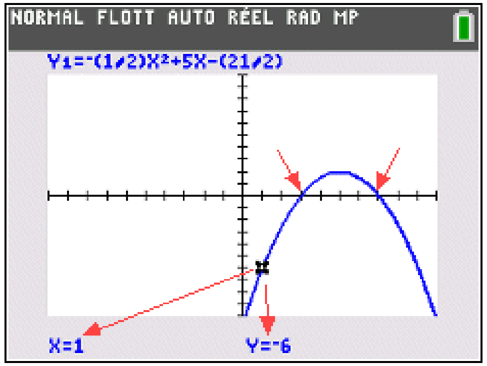
$$f(x) = -\frac{1}{2}(x-3)(x-7) = -\frac{1}{2}(x^2 - 7x - 3x + 21) = -\frac{1}{2}(x^2 - 10x + 21)$$
$$= -\frac{1}{2}x^2 + \frac{10}{2}x - \frac{21}{2} = -\frac{1}{2}x^2 + 5x - \frac{21}{2}$$

On a : $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 5x - \frac{21}{2}$, qui est de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$
avec $a = -\frac{1}{2}$, $b = 5$ et $c = -\frac{21}{2}$.

Conclusion

$$a = -\frac{1}{2}, b = 5 \text{ et } c = -\frac{21}{2}$$





Défi 14 Pour tout réel x, on pose : $f(x) = -2x^3 + 15x^2 - 28x + 15$.

• déterminer la constante réelle c telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (x-1)(-2x^2 + 13x + c)$$

• dresser le tableau de signes de $f(x)$

• résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $15x^2 - 28x + 15 \geqslant 2x^3$.

Corrigé

• déterminons la constante réelle c

Développons :

$$\begin{aligned}&(x-1)(-2x^2 + 13x + c)\\ &= -2x^3 + 13x^2 + cx + 2x^2 - 13x - c\\ &= -2x^3 + 15x^2 + (c-13)x - c\end{aligned}$$

On doit donc avoir, pour tout réel x : $f(x) = -2x^3 + 15x^2 + (c-13)x - c$.

Or, pour tout réel x : $f(x) = -2x^3 + 15x^2 - 28x + 15$.

Par identification des coefficients, on en déduit que : $\begin{cases} c - 13 = -28 \\ -c = 15 \end{cases}$

qui s'écrit aussi $\begin{cases} c = -28 + 13 \\ c = -15 \end{cases}$, soit $\begin{cases} c = -15 \\ c = -15 \end{cases}$, qui se réduit à : $c = -15$.

Il est nécessaire d'obtenir deux fois la même valeur pour c, sinon c'est qu'il y a une erreur de calcul ou une erreur dans l'énoncé.

• tableau de signes de $f(x)$

On va étudier séparément les deux facteurs $(x-1)$ et $(-2x^2 + 13x - 15)$ intervenant dans la factorisation de $f(x)$ obtenue au point précédent puis dresser un tableau de signes à plusieurs étages.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = (x-1)(-2x^2 + 13x - 15)$.

☐ étude de : $x - 1$

$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Règle : « $ax + b$ est du signe de a à droite de sa racine »

☐ étude de : $-2x^2 + 13x - 15$

[Non Rédigé] $x_1 = 5$ et $x_2 = \frac{3}{2}$

Règle : « $ax^2 + bx + c$ est du signe de a à l'extérieur de ses racines »

☐ tableau de signes

x	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		5		$+\infty$
Signe de $(1x - 1)$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
Signe de $(-2x^2 + 13x - 15)$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

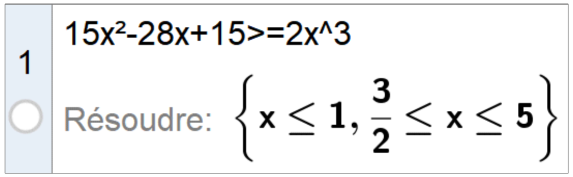
• résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $15x^2 - 28x + 15 \geqslant 2x^3$.

$15x^2 - 28x + 15 \geqslant 2x^3$ s'écrit aussi :$15x^2 - 28x + 15 - 12x^3 \geqslant 2x^3 - 2x^3$

c'est-à-dire : $f(x) \geqslant 0$.

La dernière ligne du tableau de signes précédent (dans lequel on vient de placer les **« sous-marins verts »**) donne alors :

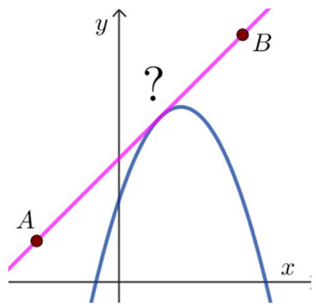
$$S =]-\infty\,;\,1] \cup [\frac{3}{2}\,;5]$$



Défi 15 Dans un repère orthogonal on note $\mathcal{P}$ la parabole représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x^2 + 3x + 2$.

On note $\mathcal{D}$ la droite passant par $A(-2\,;1)$ et $B(3\,;6)$.

Étudier l'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$: nombre de point(s) en commun et coordonnées de ce(s) point(s).



Corrigé
La droite (AB) admet pour équation $y = a(x - x_A) + y_A$ avec :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{6-1}{3-(-2)} = \frac{5}{3+2} = \frac{5}{5} = 1$$

On obtient donc : $y = 1\big(x - (-2)\big) + 1$ qui s'écrit aussi : $y = x + 2 + 1$
soit finalement $y = x + 3$.
Pour étudier l'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ il s'agit de résoudre le système :
$\begin{cases} y = x + 3 \ (*) \\ y = f(x) \end{cases}$ autrement dit : $\begin{cases} y = x + 3 \\ y = -x^2 + 3x + 2 \end{cases}$ d'où, par comparaison :

$$x + 3 = -x^2 + 3x + 2 \Leftrightarrow x + 3 + x^2 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

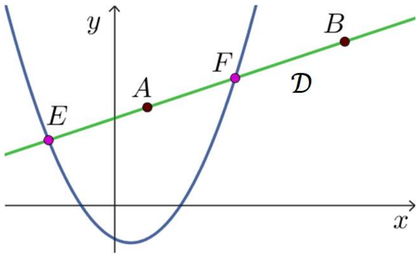
En remplaçant x par sa valeur dans $(*)$ on obtient : $y = 1 + 3 = 4$.

<u>Conclusion</u> La parabole $\mathcal{P}$ et la droite $\mathcal{D}$ ont un seul point en commun : $I(1\,;4)$.

Défi 16 Dans un repère orthogonal on note $\mathcal{P}$ la parabole représentative de f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{2}(x-2)(x+1)$$

La droite $\mathcal{D}$ passant par $A(1;3)$ et $B(7;5)$ coupe $\mathcal{P}$ en E et F avec $x_E < x_F$.



Un élève affirme que A est le milieu de $[EF]$: que penser de cette affirmation ?

Corrigé
La droite (AB) admet pour équation $y = a(x - x_A) + y_A$ avec :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5-3}{7-1} = \frac{2}{6} = \frac{2 \times 1}{2 \times 3} = \frac{1}{3}$$

On obtient donc :

$$y = \frac{1}{3}(x-1) + 3$$
$$y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} + \frac{9}{3}$$
$$y = \frac{1}{3}x + \frac{-1}{3} + \frac{9}{3}$$
$$y = \frac{1}{3}x + \frac{-1+9}{3}$$
$$y = \frac{1}{3}x + \frac{8}{3}$$

La droite (AB) admet pour équation réduite $y = \frac{1}{3}x + \frac{8}{3}$

Pour obtenir les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ on résout le système :

$$\begin{cases} y = \frac{1}{3}x + \frac{8}{3} \\ y = f(x) \end{cases}$$

autrement dit :

$$\begin{cases} y = \frac{1}{3}x + \frac{8}{3} \\ y = \frac{1}{2}(x-2)(x+1) \end{cases}$$

d'où, par comparaison :

$$\frac{1}{2}(x-2)(x+1) = \frac{1}{3}x + \frac{8}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x^2 + x - 2x - 2) = \frac{1}{3}x + \frac{8}{3}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(x^2 - x - 2) - \frac{1}{3}x - \frac{8}{3} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 1 - \frac{1}{3}x - \frac{8}{3} = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{6}x - \frac{2}{6}x - \frac{3}{3} - \frac{8}{3} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{6}x - \frac{11}{3} = 0$$
$$\Leftrightarrow 6 \times \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{6}x - \frac{11}{3}\right) = 6 \times 0 \Leftrightarrow \frac{6}{2}x^2 - 6 \times \frac{5}{6}x - 6 \times \frac{11}{3} = 0$$
$$\Leftrightarrow 3x^2 - 5x - 22 = 0$$

$3x^2 - 5x - 22$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 3$, $b = -5$, $c = -22$, de discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(3)(-22) = 25 + 264 = 289$$

On constate que $\Delta > 0$ donc l'expression $3x^2 - 5x - 22$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+5 - \sqrt{289}}{2(3)} = \frac{+5 - 17}{6} = \frac{-12}{6} = -2$$
$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+5 + \sqrt{289}}{2(3)} = \frac{+5 + 17}{6} = \frac{22}{6} = \frac{11}{3}$$

• si $x = -2$

$$y = \frac{1}{3}(-2) + \frac{8}{3} = \frac{-2}{3} + \frac{8}{3} = \frac{-2+8}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

• si $x = \dfrac{11}{3}$

$$y = \frac{1}{3}\left(\frac{11}{3}\right) + \frac{8}{3} = \frac{1 \times 11}{3 \times 3} + \frac{8 \times 3}{3 \times 3} = \frac{11}{9} + \frac{24}{9} = \frac{11 + 24}{9} = \frac{35}{9}$$

Comme $x_E < x_F$ on en déduit que :

$$E(-2\,;2) \text{ et } F\left(\frac{11}{3}\,;\frac{35}{9}\right)$$

Le milieu I de $[EF]$ a pour coordonnées :

$$x_I = \frac{x_E + x_F}{2} \text{ et } y_I = \frac{y_E + y_F}{2}$$

d'où en particulier :

$$x_I = \frac{x_E + x_F}{2} = \frac{-2 + \frac{11}{3}}{2} = \frac{\frac{-6}{3} + \frac{11}{3}}{2} = \frac{\frac{-6+11}{3}}{2} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{2}{1}} = \frac{5}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{5 \times 1}{3 \times 2} = \frac{5}{6}$$

Or $x_A = 1$ donc $x_I \neq x_A$ par conséquent $I \neq A$.

Conclusion

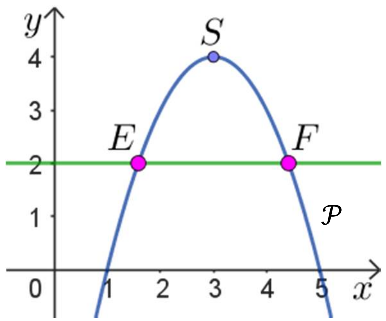
A n'est pas le milieu de $[EF]$ donc l'**affirmation de l'élève est fausse**.

Défi 17

Dans un repère orthogonal d'origine O on note $\mathcal{P}$ la parabole représentative de f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -x^2 + 6x - 5$$

On note S le sommet de $\mathcal{P}$, E et F les points d'intersection entre $\mathcal{P}$ et la droite d'équation $y = 2$ avec $x_E < x_F$.



1. Donner la forme canonique de $f(x)$.
   En déduire les coordonnées de S.
2. Calculer $\det(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OS})$: la droite (ES) passe-t-elle par O ?

Corrigé

1. On a, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2 + 6x - 5 \\ &= -[x^2 - 6x + 5] \\ &= -[(x)^2 - 2(x)(3) + (3)^2 - 9 + 5] \\ &= -[(x-3)^2 - 4] \\ &= -(x-3)^2 + 4 \end{aligned}$$

On a donc, pour tout réel x : $\boldsymbol{f(x) = -(x-3)^2 + 4}$ $(forme\ canonique)$.

On reconnaît la forme $a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $a = -1$, $\alpha = 3$ et $\beta = 4$.

Le sommet S a pour coordonnées $x_S = \alpha$ et $y_S = \beta$ donc $\boldsymbol{S(3\,;4)}$.

2. Les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{P}$ et d sont les solutions du système : $\begin{cases} y = 2 \\ y = f(x) \end{cases}$ autrement dit : $\begin{cases} y = 2 \\ y = -(x-3)^2 + 4 \end{cases}$

d'où par comparaison :

$$2 = -(x-3)^2 + 4 \Leftrightarrow 2 + (x-3)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x - 3 + \sqrt{2}\right)\left(x - 3 - \sqrt{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 3 + \sqrt{2} = 0 \ \ ou\ \ x - 3 - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow x = 3 - \sqrt{2} \ \ ou\ \ x = 3 + \sqrt{2}$$

Or $x_E < x_F$ et $y_E = y_F = 2$ donc : $E(3-\sqrt{2}\,;2)$ et $F(3+\sqrt{2}\,;2)$.

On a :

$$\overrightarrow{OE}\begin{pmatrix} x_E - x_O \\ y_E - y_O \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{OE}\begin{pmatrix} 3 - \sqrt{2} - 0 \\ 2 - 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{OE}\begin{pmatrix} 3 - \sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix}$$

On obtient de même : $\overrightarrow{OS}\begin{pmatrix} 3-0 \\ 4-0 \end{pmatrix}$ c'est-à-dire : $\overrightarrow{OS}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Donc :

$$\det(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OS}) = \begin{vmatrix} 3-\sqrt{2} & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = (3-\sqrt{2})(4) - (3)(2) = 12 - 4\sqrt{2} - 6$$

$$= 6 - 4\sqrt{2}$$

On constate que $\det(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OS}) \neq 0$ donc $\overrightarrow{OE}$ et $\overrightarrow{OS}$ ne sont pas colinéaires, par conséquent les points O, E et S ne sont pas alignés, autrement dit **la droite (ES) ne passe pas par le point O**.

Défi 18

Résoudre l'inéquation :

$$\frac{3x}{-x+5} \geqslant \frac{1}{x-1}$$

Corrigé

• recherche des valeurs interdites

Il faut que $-x + 5 \neq 0$ et $x - 1 \neq 0$, c'est-à-dire que $x \neq 5$ et $x \neq 1$.

Les valeurs interdites sont donc : 1 et 5.

• Pour x différent d'une valeur interdite, on a les équivalences :

$$\frac{3x}{-x+5} \geqslant \frac{1}{x-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x}{-x+5} - \frac{1}{x-1} \geqslant \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x}{-x+5} - \frac{1}{x-1} \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x \times (x-1)}{(-x+5) \times (x-1)} - \frac{1 \times (-x+5)}{(x-1) \times (-x+5)} \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x(x-1) - (-x+5)}{(x-1)(-x+5)} \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x^2 - 3x + x - 5}{(x-1)(-x+5)} \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x^2 - 2x - 5}{(x-1)(-x+5)} \geqslant 0$$

$3x^2 - 2x - 5$ est de la forme $3x^2 - 2x - 5$ avec $a = 3$, $b = -2$ et $c = -5$,
de discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(3)(-5) = 4 + 60 = 64$.

$\Delta > 0$ donc $3x^2 - 2x - 5$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+2 - \sqrt{64}}{2(3)} = \frac{2-8}{6} = \frac{-6}{6} = -1$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+2 + \sqrt{64}}{2(3)} = \frac{2+8}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

<u>Règle</u> : « $ax^2 + bx + c$ est du signe de a à l'extérieur des racines »
<u>Règle</u> : « $ax + b$ est du signe de a à droite de sa racine »

On obtient le tableau de signes :

x	$-\infty$		-1		1		$\frac{5}{3}$		5		$+\infty$
$3x^2 - 2x - 5$		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$x - 1$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$-x + 5$		$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
$Q(x)$		$-$	0	$+$	||	$-$	0	$+$	||	$-$	

L'inéquation s'écrit $Q(x) \geqslant 0$, la dernière ligne du tableau précédent donne :

$\boldsymbol{S = [-1; 1[\cup [\frac{5}{3}; 5[}$.

Défi 19 Dans un repère orthogonal on considère $A(1;3)$ et $B(4;9)$, on note $\mathcal{P}$ la parabole représentative de f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2x+3)(-x+6)$.
Déterminer les coordonnées du(des) point(s) commun(s) à $\mathcal{P}$ et (AB).

<u>**Corrigé**</u>

Une équation de la droite (AB) est $y = a(x - x_A) + y_A$ avec :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{9-3}{4-1} = \frac{6}{3} = 2$$

On obtient : $y = 2(x-1) + 3$ qui s'écrit aussi : $y = 2x + 1$.
La droite (AB) admet pour équation réduite : $y = 2x + 1$.
Les coordonnées des points communs à $\mathcal{P}$ et (AB) sont les solutions du système :
$\begin{cases} y = ax + b \\ y = f(x) \end{cases}$ autrement dit : $\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = (2x+3)(-x+6) \end{cases}$ d'où par comparaison :

$$2x + 1 = (2x+3)(-x+6) \Leftrightarrow 2x + 1 = -2x^2 + 12x - 3x + 18$$
$$\Leftrightarrow 2x + 1 = -2x^2 + 9x + 18 \Leftrightarrow 2x + 1 + 2x^2 - 9x - 18 = 0$$
$$\Leftrightarrow 2x^2 - 7x - 17 = 0$$

$2x^2 - 7x - 17$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 2$, $b = -7$, $c = -17$,
de discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4(2)(-17) = 49 + 136 = 185$.
$\Delta > 0$ donc il y a deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+7 - \sqrt{185}}{2(2)} = \frac{7 - \sqrt{185}}{4}$$
$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+7 + \sqrt{185}}{2(2)} = \frac{7 + \sqrt{185}}{4}$$

• si $x = \frac{7 - \sqrt{185}}{4}$

$$y = 2x + 1 = 2 \times \frac{7 - \sqrt{185}}{4} + 1 = \frac{7 - \sqrt{185}}{2} + \frac{2}{2} = \frac{7 - \sqrt{185} + 2}{2} = \frac{9 - \sqrt{185}}{2}$$

• si $x = \frac{7 + \sqrt{185}}{4}$

$$y = 2x + 1 = 2 \times \frac{7 + \sqrt{185}}{4} + 1 = \frac{7 + \sqrt{185}}{2} + \frac{2}{2} = \frac{7 + \sqrt{185} + 2}{2} = \frac{9 + \sqrt{185}}{2}$$

<u>Conclusion</u>
$\mathcal{P}$ et (AB) ont en commun les deux points :

$$E\left(\frac{7 - \sqrt{185}}{4} ; \frac{9 - \sqrt{185}}{2}\right) \text{ et } F\left(\frac{7 + \sqrt{185}}{4} ; \frac{9 + \sqrt{185}}{2}\right)$$

1	f(x):=(2x+3)(-x+6) $\rightarrow$ $f(x) := -2x^2 + 9x + 18$
2	A:=(1,3) $\rightarrow$ $A := (1, 3)$
3	B:=(4,9) $\rightarrow$ $B := (4, 9)$
4	d:=Droite(A, B) $\rightarrow$ $d: y = 2x + 1$
5	Intersection(f, d) $\rightarrow$ $\left\{\left(\frac{-\sqrt{185}+7}{4}, \frac{-\sqrt{185}+9}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{185}+7}{4}, \frac{\sqrt{185}+9}{2}\right)\right\}$

Défi 20 Résoudre l'inéquation :

$$\boldsymbol{x^2 - x + 1 \leqslant \frac{x+3}{3x+1}}$$

• recherche des valeurs interdites

Il faut que : $3x + 1 \neq 0$,c'est-à-dire : $x \neq -\frac{1}{3}$.

• Pour $x \neq -\frac{1}{3}$ on a les équivalences :

$$x^2 - x + 1 \leqslant \frac{x+3}{3x+1}$$
$$\Leftrightarrow x^2 - x + 1 - \frac{x+3}{3x+1} \leqslant \frac{x+3}{3x+1} - \frac{x+3}{3x+1}$$
$$\Leftrightarrow x^2 - x + 1 - \frac{x+3}{3x+1} \leqslant 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{(x^2 - x + 1)(3x+1)}{3x+1} - \frac{x+3}{3x+1} \leqslant 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{(x^2 - x + 1)(3x+1) - (x+3)}{3x+1} \leqslant 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{3x^3 + x^2 - 3x^2 - x + 3x + 1 - x - 3}{3x+1} \leqslant 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{3x^3 - 2x^2 + x - 2}{3x+1} \leqslant 0$$

Remarquons que $3x^3 - 2x^2 + x - 2$ s'annule pour $x = 1$ (et peut-être pour d'autres valeurs de x) donc on recherche une factorisation par $(x - 1)$, il existe une constante réelle b telle que :

$$3x^3 - 2x^2 + x - 2 = (x-1)(3x^2 + bx + 2)$$
$$\Leftrightarrow 3x^3 - 2x^2 + x - 2 = 3x^3 + bx^2 + 2x - 3x^2 - bx - 2$$
$$\Leftrightarrow 3x^3 - 2x^2 + x - 2 = 3x^3 + (b-3)x^2 + (2-b)x - 2$$

d'où par identification :

$$\begin{cases} b - 3 = -2 \\ 2 - b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2 + 3 \\ -b = 1 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ -b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow b = 1$$

L'inéquation de départ est donc équivalente à :

$$\frac{(x-1)(3x^2 + x + 2)}{3x+1} \leqslant 0$$

• $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Règle : « $ax + b$ est du signe de a à droite de sa racine »

• $3x^2 + x + 2$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 3$, $b = 1$, $c = 2$,
de discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4(3)(2) = 1 - 24 = -23$
$\Delta < 0$ donc $3x^2 + x + 2$ n'a pas de racine réelle.
Règle (dans le cas $\Delta < 0$) : « $ax^2 + bx + c$ est toujours du signe de a et ne s'annule pas ».

On obtient finalement le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$x - 1$		$-$		$-$	0	$+$	
$3x^2 + x + 2$		$+$		$+$		$+$	
$3x + 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$Q(x)$		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	

On souhaite que $Q(x)$ soit négatif ou nul, la dernière du tableau de signes donne alors pour ensemble des solutions : $\boldsymbol{S = \left]-\frac{1}{3}\,;1\right]}$.

Défi 21 On munit le plan d'un repère, f et g sont définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -x^2 + 8x - 14 \text{ et } g(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{15}{4}x + 10$$

Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

Corrigé

La position relatives de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ s'obtient à partir de l'étude du signe de la différence $f(x) - g(x)$.

On a, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} & f(x) - g(x) \\ & = -x^2 + 8x - 14 - \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{15}{4}x + 10\right) \\ & = -x^2 + 8x - 14 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{15}{4}x - 10 \\ & = -\frac{4}{4}x^2 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{32}{4}x + \frac{15}{4} - 14 - 10 \\ & = -\frac{5}{4}x^2 + \frac{47}{4}x - 24 \end{aligned}$$

$-\frac{5}{4}x^2 + \frac{47}{4}x - 24$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = -\frac{5}{4}$, $b = \frac{47}{4}$ et $c = -24$, de discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = \left(\frac{47}{4}\right)^2 - 4\left(-\frac{5}{4}\right)(-24) = \frac{289}{16} = \left(\frac{17}{4}\right)^2$$

$\Delta > 0$ donc l'expression admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\frac{47}{4} - \frac{17}{4}}{2\left(-\frac{5}{4}\right)} = \frac{-\frac{64}{4}}{-\frac{5}{2}} = +\frac{16}{\frac{5}{2}} = 16 \times \frac{2}{5} = \frac{32}{5} \ (= 6{,}4)$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\frac{47}{4} + \frac{17}{4}}{2\left(-\frac{5}{4}\right)} = \frac{-\frac{30}{4}}{-\frac{5}{2}} = +\frac{\frac{15}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{15}{2} \times \frac{2}{5} = \frac{15 \times 2}{2 \times 5} = 3$$

Règle : « $ax^2 + bx + c$ est du signe de a à l'extérieur des racines ».

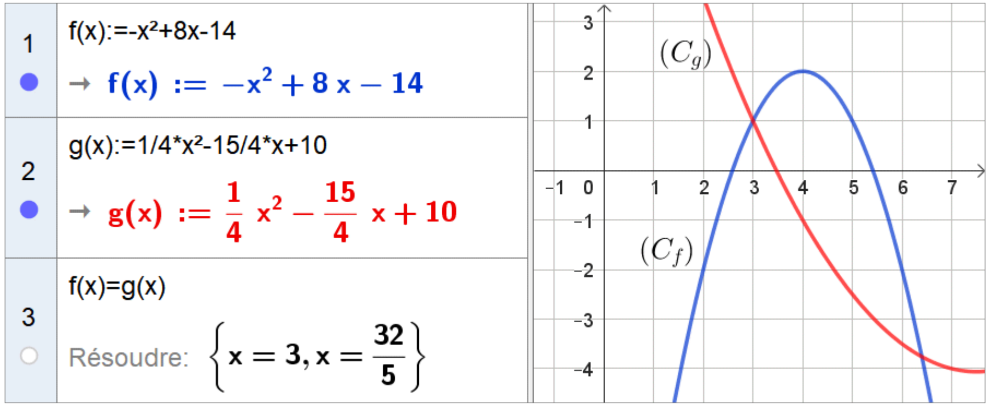
On obtient finalement le tableau de signes :

x	$-\infty$		3		$\frac{32}{5}$		$+\infty$
$f(x) - g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

• sur $]-\infty ; 3[$ et sur $]\frac{32}{5} ; +\infty[$: $\mathcal{C}_f$ est strictement **en dessous** de $\mathcal{C}_g$

• sur $]3 ; \frac{32}{5}[$: $\mathcal{C}_f$ est strictement **au-dessus** de $\mathcal{C}_g$

• $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ se coupent en deux points d'abscisses respectives 3 et $\frac{32}{5}$



Complément

$$f(3) = -(3)^2 + 8(3) - 14 = 1 \ (= g(3))$$

$$f\left(\frac{32}{5}\right) = -\left(\frac{32}{5}\right)^2 + 8\left(\frac{32}{5}\right) - 14 = -\frac{94}{25} \ \left(= g\left(\frac{32}{5}\right)\right)$$

Les points d'intersection des deux courbes sont :

$$E(3 ; 1) \text{ et } F\left(\frac{32}{5} ; -\frac{94}{25}\right)$$

Défi 22 Le plan est muni d'un repère orthogonal.
On note $\mathcal{P}$ la parabole représentative de f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 5x + 7$ et g la fonction affine dont la droite représentative passe par $A(-1 ; 4)$ et $B(5 ; 1)$. Étudier la position relative de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{C}_g$.

Corrigé

Pour tout réel x, on a : $g(x) = a(x - x_A) + y_A$ avec :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1 - 4}{5 - (-1)} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$$

donc :

$$g(x) = -\frac{1}{2}\big(x-(-1)\big)+4 = -\frac{1}{2}(x+1)+\frac{8}{2} = -\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}+\frac{8}{2}$$
$$= -\frac{1}{2}x+\frac{-1+8}{2} = -\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$$

On a donc, pour tout réel x : $g(x) = -\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$.

La position relatives de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ s'obtient à partir de l'étude du signe de la différence $f(x)-g(x)$.

On a, pour tout réel x :

$$\begin{aligned}
&f(x)-g(x)\\
&= x^2-5x+7-\left(-\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}\right)\\
&= x^2-5x+7+\frac{1}{2}x-\frac{7}{2}\\
&= x^2-5x+\frac{1}{2}x+7-\frac{7}{2}\\
&= x^2-\frac{10}{2}x+\frac{1}{2}x+\frac{14}{2}-\frac{7}{2}\\
&= x^2-\frac{9}{2}x+\frac{7}{2}
\end{aligned}$$

$x^2-\frac{9}{2}x+\frac{7}{2}$ est de la forme ax^2+bx+c avec $a=1$, $b=-\frac{9}{2}$ et $c=\frac{7}{2}$, de discriminant :

$$\Delta = b^2-4ac = \left(-\frac{9}{2}\right)^2-4(1)\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{81}{4}-\frac{28}{2} = \frac{81}{4}-\frac{56}{4} = \frac{25}{4} = \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$\Delta > 0$ donc l'expression admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+\frac{9}{2}-\frac{5}{2}}{2(1)} = \frac{\frac{4}{2}}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

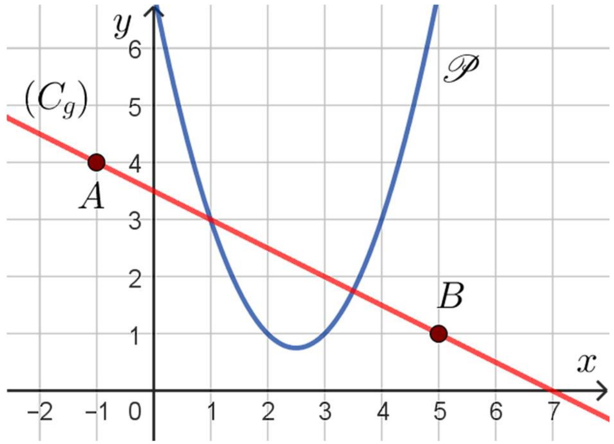
$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+\frac{9}{2}+\frac{5}{2}}{2(1)} = \frac{\frac{14}{2}}{2} = \frac{7}{2}$$

Règle : « ax^2+bx+c est du signe de a à l'extérieur des racines ».

On obtient finalement le tableau de signes :

x	$-\infty$		1		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
$f(x)-g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- sur $]-\infty;1[$ et sur $]\frac{7}{2}\,;+\infty[$: $\mathcal{P}$ est strictement **au-dessus** de $\mathcal{C}_g$
- sur $]1\,;\frac{7}{2}[$: $\mathcal{P}$ est strictement **en dessous** de $\mathcal{C}_g$
- $\mathcal{P}$ et $\mathcal{C}_g$ se coupent en deux points d'abscisses respectives 1 et $\frac{7}{2}$



Compléments

Les points d'intersection ont pour coordonnées $(1;3)$ et $\left(\frac{7}{2}\,;\frac{7}{4}\right)$.

Défi 26

1. Une expression du second degré ax^2+bx+c, $a \neq 0$, a un discriminant positif ou nul, démontrer que la somme des racines est égale à : $-\frac{b}{a}$.
(on convient que si $\Delta = 0$ on appelle somme des racines le nombre $2x_0$).

2. Pour tout réel x, on pose : $f(x) = x^2+\left(5\sqrt{3}-\sqrt{17}-1\right)x+\sqrt{17}-5\sqrt{3}$.

a. Montrer que 1 est une racine de f.

b. En déduire l'autre racine de f.

Corrigé

1. Si $\Delta > 0$, alors il y a deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad et \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

La somme des racines est $x_1 + x_2$ et on a :

$$x_1 + x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b-\sqrt{\Delta}+(-b+\sqrt{\Delta})}{2a}$$

$$= \frac{-b-\sqrt{\Delta}-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a} = -\frac{b}{a}$$

Si $\Delta = 0$, alors il y a une seule racine :

$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$

La somme des racines est $2x_0$ et on a :

$$2x_0 = 2 \times \frac{-b}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

Dans tous les cas la somme des racines est égale à : $-\frac{b}{a}$.

2. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^2 + \left(5\sqrt{3} - \sqrt{17} - 1\right)x + \sqrt{17} - 5\sqrt{3}$

a. Montrons que 1 est une racine de f.

$f(1)$

$= 1^2 + \left(5\sqrt{3} - \sqrt{17} - 1\right) \times 1 + \sqrt{17} - 5\sqrt{3}$

$= 1 + 5\sqrt{3} - \sqrt{17} - 1 + \sqrt{17} - 5\sqrt{3}$

$= 0$

Le nombre 1 est bien une racine de f.

b. Déterminons la deuxième racine de f.

$x^2 + \left(5\sqrt{3} - \sqrt{17} - 1\right)x + \sqrt{17} - 5\sqrt{3}$ est de la forme $ax^2 + bx + c$

avec $a = 1$, $b = 5\sqrt{3} - \sqrt{17} - 1$ et $c = -5\sqrt{3}$.

donc la somme des racines est égale à :

$$-\frac{b}{a} = -\frac{5\sqrt{3}-\sqrt{17}-1}{1} = \frac{-\left(5\sqrt{3}-\sqrt{17}-1\right)}{1} = -5\sqrt{3} + \sqrt{17} + 1$$

L'une des racine est 1, donc en notant x_2 l'autre racine on a :

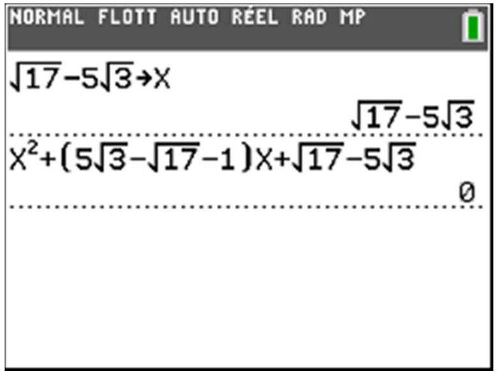
$$1 + x_2 = -5\sqrt{3} + \sqrt{17} + 1$$

autrement dit :

$$x_2 = -5\sqrt{3} + \sqrt{17} + 1 - 1 = -5\sqrt{3} + \sqrt{17} = \sqrt{17} - 5\sqrt{3}$$

L'autre racine est donc : $\sqrt{17} - 5\sqrt{3}$.

Vérification



Défi 27 Résoudre l'inéquation :

$$\frac{1}{x-1} + \frac{5}{x+1} \leqslant \frac{x^2}{x^2-1}$$

Corrigé

• recherche des valeurs interdites

Il faut que : $x - 1 \neq 0$, $x + 1 \neq 0$ et $x^2 - 1 \neq 0$, c'est-à-dire : $x \neq -1$ et $x \neq 1$.

• Pour x différent de -1 et de 1 on a les équivalences

$$\frac{1}{x-1} + \frac{5}{x+1} \leqslant \frac{x^2}{x^2-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x-1} + \frac{5}{x+1} - \frac{x^2}{x^2-1} \leqslant 0 - \frac{x^2}{x^2-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 \times (x+1)}{(x-1)(x+1)} + \frac{5(x-1)}{(x+1)(x-1)} - \frac{x^2}{(x+1)(x-1)} \leqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+1+5(x-1)-x^2}{(x-1)(x+1)} \leqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+1+5x-5-x^2}{(x-1)(x+1)} \leqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2+6x-4}{(x-1)(x+1)} \leqslant 0$$

[N.R.] $-x^2 + 6x - 4$ admet pour racines $3 - \sqrt{5}$($\approx 0,76$) et $3 + \sqrt{5}$ ($\approx 5,24$)

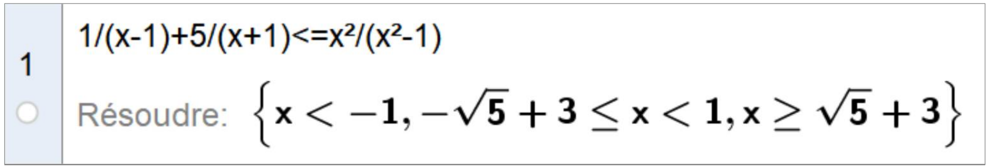
Règle : « $ax + b$ est du signe de a à droite de sa racine ».
Règle : « $ax^2 + bx + c$ est du signe de a à l'extérieur des racines ».

On obtient le tableau de signes :

x	$-\infty$		-1		$3-\sqrt{5}$		1		$3+\sqrt{5}$		$+\infty$
$-x^2+6x-4$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$Q(x)$		$-$	$\parallel$	$+$	0	$-$	$\parallel$	$+$	0	$-$	

On souhaite que $Q(x)$ soit négatif ou nul, la dernière du tableau de signes donne alors pour ensemble des solutions :

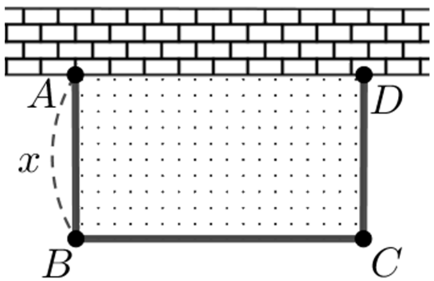
$$\boldsymbol{S =]-\infty; -1[\cup [3-\sqrt{5}; 1[\cup [3+\sqrt{5}; +\infty[}$$



Défi 28 Le potager rectangulaire adossé au mur

L'unité de distance est le mètre.
On doit délimiter un potager rectangulaire $ABCD$ et le clôturer sur trois de ses quatre côtés, on dispose pour cela de matériaux permettant de construire au total $20\ m$ de clôture : $AB + BC + CD = 20$.

On pose : $AB = x$ et on note $f(x)$ l'aire du potager , $0 \leqslant x \leqslant 10$.



1. Montrer que pour tout $x \in [0; 10]$, $f(x) = -2x^2 + 20x$.

2. Étudier les variations puis dresser le tableau de variation de f.
Quelle est l'aire maximale du potager ?
Préciser alors les longueurs AB et BC.

<u>**Corrigé**</u>

1. $ABCD$ est un rectangle donc $\mathcal{A}_{ABCD} = AB \times BC$.
or, d'une part : $AB = x$ et d'autre part : $AB + BC + CD = 20$ qui donne $x + BC + x = 20$ autrement dit $BC = 20 - 2x$, donc :

$$\mathcal{A}_{ABCD} = x \times (20 - 2x) = 20x - 2x^2 = -2x^2 + 20x$$

Comme $f(x) = \mathcal{A}_{ABCD}$ on obtient : $f(x) = -2x^2 + 20x$.
Pour tout $x \in [0; 10]$, $f(x) = -2x^2 + 20x$.

2. $-2x^2 + 20x$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = -2$, $b = 20$ et $c = 0$.
On a :

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-20}{2(-2)} = \frac{-20}{-4} = +5$$
$$\beta = f(\alpha) = f(5) = -2(5)^2 + 20(5) = -2 \times 25 + 100 = 50$$

$a = -2$, $a < 0$ donc :
$f \nearrow$ sur $[0; \alpha]$ i.e. sur $[0; 5]$ et $f \searrow$ sur $[\alpha; 10]$ i.e. sur $[5; 10]$

$$f(0) = -2(0)^2 + 20(0) = 0$$
$$f(10) = -2(10)^2 + 20(10) = -2 \times 100 + 200 = 0$$

On obtient finalement le tableau de variation :

x	0		$\alpha = 5$		10
Sens de variation de f	0	$\nearrow$	$\beta = 50$	$\searrow$	0

Le tableau de variation montre que le maximum de f sur $[0; 10]$ est 50, atteint pour $x = 5$.
Lorsque $AB = 5$, on a : $BC = 20 - 2(5) = 20 - 10 = 10$.

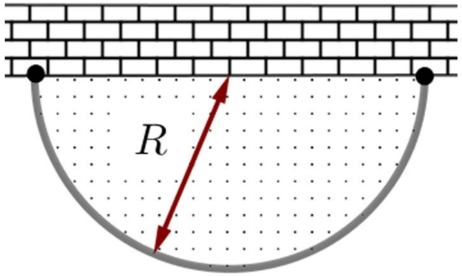
L' **aire maximale du potager est $\boldsymbol{50\ m^2}$**, atteinte lorsque $\boldsymbol{AB = 5\ m}$ et $\boldsymbol{BC = 10\ m}$.

Défi 29 **Le potager semi-circulaire adossé au mur**

L'unité de distance est le mètre.

On doit délimiter un potager de forme semi-circulaire, adossé à un mur, et clôturer le bord arrondi.

On dispose pour cela de matériaux permettant de construire au total 20 m de clôture, on note R le rayon du disque dont le potager occupe la moitié.



1. Déterminer la valeur exacte de R.

2. En déduire la valeur exacte de l'aire du potager, en donner l'arrondi à 0,1 m^2.

Corrigé

1. Le périmètre d'un cercle de rayon R est $2\pi R$ donc la longueur d'un demi-cercle est πR, et cette longueur est égale à 20, on a donc :

$\pi R = 20$ autrement dit $\boldsymbol{R = \dfrac{20}{\pi}}$.

2. L'aire d'un disque de rayon R est πR^2 donc celle d'un demi-disque est $\frac{1}{2}\pi R^2$.

Le potager a donc une aire égale à :

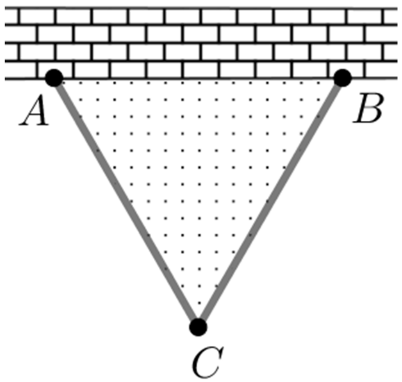
$$\mathcal{A}_{potager} = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{20}{\pi}\right)^2 = \frac{1}{2}\pi\frac{20^2}{\pi^2} = \frac{1}{2}\pi\frac{400}{\pi^2} = \frac{\pi \times 400}{2 \times \pi \times \pi} = \frac{200}{\pi}$$

Le potager a une aire de $\boldsymbol{\dfrac{200}{\pi}\ cm^2}$, soit environ $\boldsymbol{63,7\ m^2}$.

Défi 30 **Le potager triangle équilatéral adossé au mur**

L'unité de distance est le mètre.

On doit délimiter un potager ayant la forme d'un triangle équilatéral, adossé à un mur, et clôturer ses deux côtés non alignés avec le mur. On dispose pour cela de matériaux permettant de construire au total 20 m de clôture.

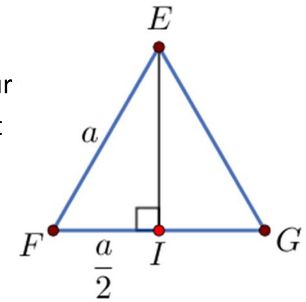


1. Déterminer en fonction de a l'aire d'un triangle équilatéral de côté a.

2. Déterminer la valeur exacte de l'aire du potager, en donner l'arrondi à 0,1 m^2.

Corrigé

1. Soit EFG un triangle équilatéral de côté a, notons I le milieu de $[FG]$. La médiane (EI) est aussi la hauteur issue de E de EFG donc $(EI) \perp [FG]$, par conséquent le triangle EFI est rectangle en I, donc d'après le théorème de Pythagore on en déduit que :



$$EF^2 = EI^2 + IF^2$$

Or $EF = a$ et $IF = \dfrac{a}{2}$ donc :

$$a^2 = EI^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Leftrightarrow a^2 = EI^2 + \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow a^2 - \frac{a^2}{4} = EI^2 \Leftrightarrow \frac{4a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = EI^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3a^2}{4} = EI^2 \Leftrightarrow EI = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} \Leftrightarrow EI = \frac{\sqrt{3a^2}}{\sqrt{4}} \Leftrightarrow EI = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{a^2}}{2}$$

Or $a > 0$ donc $\sqrt{a^2} = a$, donc : $EI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

L'aire d'un triangle est donnée par :

$$\mathcal{A}_{triangle} = \frac{côté \times hauteur\ associée}{2}$$

donc :

$$\mathcal{A}_{EFG} = \frac{FG \times EI}{2} = \frac{a \times \frac{a\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{2}}{\frac{2}{1}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2 \times 2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Un triangle équilatéral de côté $\boldsymbol{a}$ a pour aire : $\boldsymbol{\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}}$.

2. Pour le potager ABC, en notant a son côté, on a : $a + a = 20$, autrement dit $2a = 20$ soit finalement $a = 10$.

Son aire est, d'après la question précédente :

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{10^2\sqrt{3}}{4} = \frac{100\sqrt{3}}{4} = \frac{4 \times 25\sqrt{3}}{4} = 25\sqrt{3}$$

L'aire du potager est égale $\boldsymbol{25\sqrt{3}\ m^2}$, soit environ $\boldsymbol{43,3\ m^2}$ arrondi à 0,1 m^2.

Défi 31 Équation avec un radical

On souhaite résoudre l'équation $(E) : 2x + 3\sqrt{x} - 2 = 0$.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue $X : 2X^2 + 3X - 2 = 0$
2. En déduire la(les) solution(s) de (E).

Corrigé

1. $2X^2 + 3X - 2$ est de la forme $aX^2 + bX + c$ avec $a = 2$, $b = 3$ et $c = -2$, de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4(2)(-2) = 9 + 16 = 25$.
   $\Delta > 0$ donc l'expression admet deux racines réelles distinctes :
$$X_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3-\sqrt{25}}{2(2)} = \frac{-3-5}{4} = -\frac{8}{4} = -2$$
$$X_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3+\sqrt{25}}{2(2)} = \frac{-3+5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$
   L'équation $2X^2 + 3X - 2 = 0$ admet pour solutions : -2 et $\frac{1}{2}$.

$$(E) : 2x + 3\sqrt{x} - 2 = 0$$

La quantité sous une racine carrée doit être positive ou nulle donc il faut que $x \geqslant 0$, donc le domaine d'existence de (E) est : $\mathcal{D} = [0; +\infty[$.
$\mathcal{D}$ est le domaine d'existence de l'équation
Pour $x \in \mathcal{D}$ l'équation s'écrit aussi : $2(\sqrt{x})^2 + 3\sqrt{x} - 2 = 0$.
En posant $X = \sqrt{x}$ elle devient : $2X^2 + 3X - 2 = 0$, qui donne d'après la question précédente : $X = -2$ ou $X = \frac{1}{2}$.
Comme $X = \sqrt{x}$, on obtient : $\sqrt{x} = -2$ ou $\sqrt{x} = \frac{1}{2}$.

• $\sqrt{x} = -2$ est impossible (le résultat d'une racine carrée est positif ou nul)

• $\sqrt{x} = \frac{1}{2}$ est équivalent à $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ (\sqrt{x})^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0 \\ x = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$

L'équation (E) admet pour solution : $\mathbf{\frac{1}{4}}$.

vérification
$$2 \times \frac{1}{4} + 3\sqrt{\frac{1}{4}} - 2 = \frac{1}{2} + 3 \times \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}} - 2 = \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{2} - 2 = \frac{4}{2} - 2 = 2 - 2 = 0$$

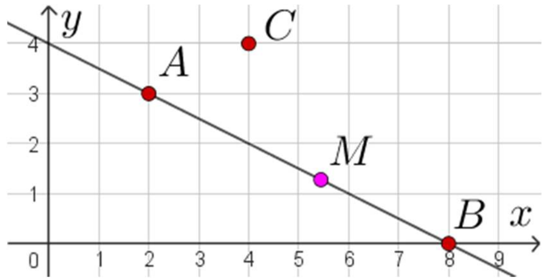
Défi 32 Équation avec paramètre

$m \in \mathbb{R}$, (E) est l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R} : x^2 + (m+1)x + 5m^2 + 1 = 0$.
Existe-t-il m tel que (E) admet au moins une solution ?

Corrigé

$x^2 + (m+1)x + 5m^2 + 1$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 1, b = m + 1$ et $c = 5m^2 + 1$, de discriminant :
$\Delta_m = b^2 - 4ac = (m+1)^2 - 4(1)(5m^2+1) = m^2 + 2m + 1 - 4(5m^2 + 1)$
$\Delta_m = m^2 + 2m + 1 - 20m^2 - 4 = -19m^2 + 2m - 4$
$-19m^2 + 2m - 4$ est de la forme $am^2 + bm + c$ avec $a = -19$, $b = 2$ et $c = -4$, de discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4(-19)(-4) = -224$
$\Delta < 0$ donc $-19m^2 + 2m - 4$ n'a pas de racine réelle.
Règle (lorsque $\Delta < 0$) : $ax^2 + bx + c$ est du signe de a et ne s'annule pas donc $-19m^2 + 2m - 4$ est du signe de -19 et ne s'annule pas, autrement dit : pour tout $m \in \mathbb{R}, -19m^2 + 2m - 4 < 0$, autrement dit $\Delta_m < 0$ par conséquent (E) a une discriminant toujours strictement négatif donc :
il n'existe pas $m \in \mathbb{R}$ tel que (E) admette une solution réelle.

Défi 33 Distance minimale



Dans un repère orthonormé, on donne$A(2; 3)$, $B(8; 0)$ et C(4;4), M est un point variable de (AB).

1. Justifier que : $y_M = -\frac{1}{2}x_M + 4$.
2. En déduire que : $CM^2 = \frac{5}{4}x^2 - 8x + 16$.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}f$, on pose : $f(x) = \frac{5}{4}x^2 - 8x + 16$.
   Dresser le tableau de variation de f.
4. On admet que : « pour tout M de la droite (AB) : CM est minimal lorsque CM^2 est minimal ». Pour quel point M de la droite (AB) la distance CM est-elle minimale et que vaut cette dernière ?
   On donnera la distance minimale et les coordonnées de M sous forme de fraction irréductible.

Corrigé

1. $A(2;3)$, $B(8;0)$

La droite (AB) admet pour équation $y = a(x - x_A) + y_A$ avec :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0-3}{8-2} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$$

On obtient :

$$y = -\frac{1}{2}(x-2) + 3 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + 1 + 3 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + 4$$

Or $M \in (AB)$ donc ses coordonnées vérifient cette équation, autrement dit :

$$\boldsymbol{y_M = -\frac{1}{2}x_M + 4}$$

2. En déduire que : $CM^2 = \frac{5}{4}x^2 - 8x + 16$.

On est dans un repère orthonormé donc on peut appliquer la formule de la distance : $CM = \sqrt{(y_M - y_C)^2 + (x_M - x_C)^2}$

donc : $CM^2 = (y_M - y_C)^2 + (x_M - x_C)^2$.

En utilisant les coordonnées de C et de M, on obtient :

$$CM^2 = \left(-\frac{1}{2}x_M + 4 - 4\right)^2 + (x_M - 4)^2 = \left(-\frac{1}{2}x_M\right)^2 + (x_M - 4)^2$$

$$= \frac{1}{4}x_M^2 + x_M^2 - 8x_M + 16 = \left(\frac{1}{4} + 1\right)x_M^2 - 8x_M + 16 = \frac{5}{4}x^{M^2} - 8x_M + 16$$

On a donc bien : $CM^2 = \frac{5}{4}x^2 - 8x + 16$.

3. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{5}{4}x^2 - 8x + 16$, dresser le tableau de variation de f.

$\frac{5}{4}x^2 - 8x + 16$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = \frac{5}{4}$, $b = -8$, $c = 16$.

On a :

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{+8}{2\left(\frac{5}{4}\right)} = \frac{8}{\frac{5}{2}} = 8 \times \frac{2}{5} = \frac{8 \times 2}{5} = \frac{16}{5}$$

$$\beta = f(\alpha) = f\left(\frac{16}{5}\right) = \frac{5}{4}\left(\frac{16}{5}\right)^2 - 8\left(\frac{16}{5}\right) + 16 = \frac{16}{5}$$

$a = \frac{5}{4}$, $a > 0$ donc :

$f \searrow$ sur $]-\infty; \alpha]$ i.e. sur $\left]-\infty; \frac{16}{5}\right]$ et $f \nearrow$ sur $\left[\frac{16}{5}; +\infty\right[$.

On obtient finalement le tableau de variation :

x	$-\infty$	$\alpha = \frac{16}{5}$	$+\infty$
Sens de variation de f	$\searrow$	$\beta = \frac{16}{5}$	$\nearrow$

4. On admet que : « pour tout M de la droite (AB) : CM est minimal lorsque CM^2 est minimal ». Pour quel point M de la droite (AB) la distance CM est-elle minimale et que vaut cette dernière ? *On donnera la distance minimale et les coordonnées de M sous forme de fraction irréductible.*

Lorsque $x_M = \alpha = \frac{16}{5}$, alors

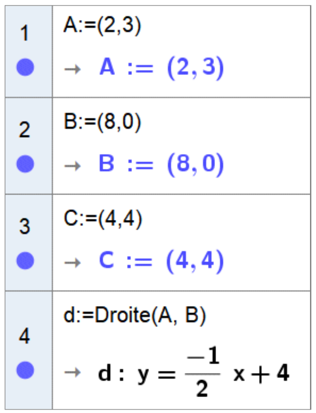
$$y_M = -\frac{1}{2} \times \frac{16}{5} + 4 = -\frac{8}{5} + \frac{20}{5} = \frac{-8}{5} + \frac{20}{5} = \frac{-8+20}{5} = \frac{12}{5}$$

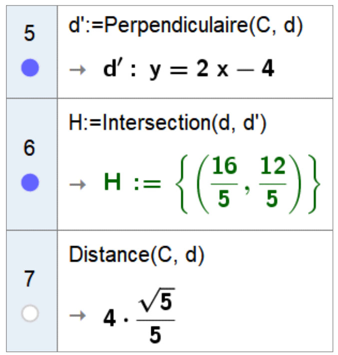
Le tableau de variation de f montre que CM^2 a pour minimum $\frac{16}{5}$, donc la distance minimale est $CM = \sqrt{\frac{16}{5}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$

atteinte pour $x_M = \frac{16}{5}$, c'est-ç-dire pour $\boldsymbol{M\left(\frac{16}{5}; \frac{12}{5}\right)}$.

<u>Vérification</u>

Cette distance minimale s'appelle « la distance entre (AB) et C », elle est égale à CH où H est le projeté orthogonal de C sur (AB).





Défi 34 Somme de deux carrés

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $x^2 + (10 - x)^2 = 68$, vérifier que les deux solutions sont des entiers naturels.

Corrigé

$x^2 + (10 - x)^2 = 68$
$\Leftrightarrow x^2 + 100 - 20x + x^2 = 68$
$\Leftrightarrow 2x^2 - 20x + 100 - 68 = 0$
$\Leftrightarrow 2x^2 - 20x + 32 = 0$
$\Leftrightarrow 2(x^2 - 10x + 16) = 0$
$\Leftrightarrow x^2 - 10x + 16 = 0$
$\Leftrightarrow (x - 5)^2 - 25 + 16 = 0$
$\Leftrightarrow (x - 5)^2 - 9 = 0$
$\Leftrightarrow (x - 5)^2 - 3^2 = 0$
$\Leftrightarrow (x - 5 + 3)(x - 5 - 3) = 0$
$\Leftrightarrow (x - 2)(x - 8) = 0$
$\Leftrightarrow x - 2 = 0 \; ou \; x - 8 = 0$
$\Leftrightarrow x = 2 \; ou \; x = 8$

Or $2 \in \mathbb{N}$ et $8 \in \mathbb{N}$ donc les solutions de l'équations sont des entiers naturels.
On peut aussi résoudre $2x^2 - 20x + 32 = 0$ par la méthode du discriminant.

Défi 35 Somme de trois carrés d'entiers consécutifs

[*d'après Lycée pour adultes, page des premières*]
Déterminer x entier naturel non nul tel que : $x^2 + (x + 1)^2 + (x + 2)^2 = 2\,030$.
Complément
Écrire un programme Python permettant d'afficher la ou les valeur(s) de x.

Corrigé

On a les équivalences :

$x^2 + (x + 1)^2 + (x + 2)^2 = 2\,030$
$\Leftrightarrow x^2 + x^2 + 2x + 1 + x^2 + 4x + 4 = 2\,030$
$\Leftrightarrow 3x^2 + 6x + 5 - 2\,030 = 0$
$\Leftrightarrow 3x^2 + 6x - 2025 = 0$
$\Leftrightarrow 3(x^2 + 2x - 675) = 0$
$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 675 = 0$
$\Leftrightarrow (x)^2 + 2(x)(1) + (1)^2 - 1 - 675 = 0$
$\Leftrightarrow (x + 1)^2 - 676 = 0$
$\Leftrightarrow (x + 1)^2 - (26)^2 = 0$
$\Leftrightarrow (x + 1 + 26)(x + 1 - 26) = 0$
$\Leftrightarrow (x + 27)(x - 25) = 0$
$\Leftrightarrow x + 27 = 0 \; ou \; x - 25 = 0$
$\Leftrightarrow x = -27 \; ou \; x = 25$

$-27 \notin \mathbb{N}$ donc est refusé, $25 \in \mathbb{N}$ donc est accepté.
On a donc $x = 25$.
On peut aussi résoudre $3x^2 + 6x - 2025 = 0$ par la méthode du discriminant.

Vérification

```
NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
25²+26²+27²
                    2030
```

Défi 36 Une équation de degré 3 avec recherche Python

Pour tout réel x, on pose : $f(x) = 4x^3 - 472x^2 - 2\,499x + 4\,797$.

1. À l'aide du programme Python suivant, à compléter, vérifier que le polynôme du quatrième degré f admet au moins une racine entière.

```python
def f(x:int):
    
for x in range(1001):
    if 
        print("une racine entière est : ",x)
```

2. En déduire une factorisation de $f(x)$ puis déterminer les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $4x^3 - 472x^2 - 2\,499x + 4\,797 = 0$.

Corrigé

1. Programme Python

```python
def f(x:int):
    return 4*x**3-472*x**2-2499*x+4797
for x in range(1001):
    if f(x)==0:
        print("une racine entière est : ",x)
```

```
Shell
>>> %Run '1E défi 36 2023-24 .py'
 une racine entière est :  123
```

2. 123 est une racine de f « donc » on peut rechercher une factorisation de $f(x)$ sous la forme : $f(x) = (x - 123)(ax^2 + bx + c)$.
Le terme de plus haut degré de $f(x)$ est $4x^3$ et celui du membre de droite est ax^3 donc $a = 4$.
Le terme constant de $f(x)$ est 4 797 et celui du membre de droite est $(-123c)$ donc : $-123c = 4\,797$, ce qui donne $c = -\frac{4\,797}{123} = -39$.

On recherche donc b tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (x-123)(4x^2+bx-39)$.
Le terme en x de $f(x)$ est $-2\,499x$ et celui du tembre de droite est $(-39-123b)x$ donc :

$$-39-123b = -2\,499 \Leftrightarrow 39+123b = 2499 \Leftrightarrow 123b = 2499-39$$
$$\Leftrightarrow 123b = 2460 \Leftrightarrow x = \frac{2\,460}{123} \Leftrightarrow x = \frac{20\times 123}{123} \Leftrightarrow x = 20$$

On a donc, pour tout réel x : $f(x) = (x-123)(4x^2+20x-39)$.

On peut vérifier en développant « à la main » $(x-123)(4x^2+20x-39)$ et constater que cela redonne bien : $4x^3-472x^2-2\,499x+4\,797$.
Autre méthode : conserver a, b et c, obtenir un système de quatre équations à trois inconnues a, b, c donnant $a=4, b=20$ et $c=-39$.

L'équation $4x^3-472x^2-2\,499x+4\,797=0$ s'écrit $f(x)=0$, ou encore en utilisant la factorisation précédente :

$$(x-123)(4x^2+20x-39) = 0$$
$$\Leftrightarrow x-123=0 \ ou\ 4x^2+20x-39=0$$

• $x-123=0 \Leftrightarrow x=123$
• $4x^2+20x-39=0$
$4x^2+20x-39$ est de la forme $ax^2+bx+c=0$ avec $a=4$, $b=20$, $c=-39$, de discriminant $\Delta = b^2-4ac = 20^2-4(4)(-39) = 1\,024$.
$\Delta > 0$ donc $4x^2+20x-39$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-20-\sqrt{1024}}{2(4)} = \frac{-20-32}{8} = -\frac{52}{8} = -\frac{13}{2}$$
$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-20+\sqrt{1024}}{2(4)} = \frac{-20+32}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

Conclusion
L'équation $4x^3-472x^2-2\,499x+4\,797=0$ admet pour solutions :

$$-\mathbf{\frac{13}{2}},\ \mathbf{\frac{3}{2}} \text{ et } \mathbf{123}.$$

1
4x^3-472x²-2499x+4797=0
Résoudre: $\left\{x = \frac{-13}{2}, x = \frac{3}{2}, x = 123\right\}$

Défi 37 **Trois points connus d'une parabole**
Dans un repère orthonormé $(0;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ on donne $A(-1;1)$, $B(1;7)$ et $C(3;5)$.
On note $\mathcal{P}$ une parabole passant par les trois points A, B, C - si elle existe - et $f : x \mapsto ax^2+bx+c$ la fonction polynôme du second degré de courbe représentative $\mathcal{P}$ dans $(0;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Partie I **Utilisation d'un programme Python**
Le programme suivant recherche des coefficients a, b et c tous entiers relatifs si cela est possible :

```
1 def f(a,b,c,x:int):
2     return a*x**2+b*x+c
3 for a in range(-100,101):
4     for b in range(-100,101):
5         for c in range(-100,101):
6             if
7                 print("a=",a,"b=",b,"c=",c)
```

Compléter la ligne numéro 6, faire tourner ce programme puis vérifier par un calcul « à la main » que, pour le triplet (a,b,c) obtenu avec par ce programme, on a bien $A\in\mathcal{P}$, $B\in\mathcal{P}$ et $C\in\mathcal{P}$.
Pourquoi n'est-on pas certain d'avoir trouvé tous les triplets (a,b,c) possibles ?

Partie II **Étude mathématique**
Démontrer que : $\begin{cases} a-b+c=1 \\ a+b+c=7 \\ 9a+3b+c=5 \end{cases}$ puis en procédant par équivalence entre systèmes de trois équations à trois inconnues déterminer tous les triplets (a,b,c) possibles. Que peut-on en déduire sur l'existence et l'unicité de $\mathcal{P}$.

Partie III **Examen d'une cocyclicité éventuelle**
On admet qu'il existe une et une seule parabole $\mathcal{P}$ passant par A, B et C, représentation graphique dans $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ de $f : x \mapsto -x^2+3x+5$.

1. Déterminer les coordonnées du sommet S de la parabole $\mathcal{P}$?
2. Les points A, B, S et C sont-ils cocycliques ? Justifier.

<u>Corrigé</u>

repère orthonormé $(0;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, $A(-1;1)$ $\;B(1;7)$ $\;C(3;5)$

$\mathcal{P}$ parabole passant par les trois points A, B, C, $f\,:x \mapsto ax^2+bx+c$ de courbe représentative $\mathcal{P}$ dans $(0;\vec{\imath},\vec{\jmath})$

Partie I Utilisation d'un programme Python

Le programme suivant recherche des coefficients a, b et c tous entiers relatifs si cela est possible :

```
1 def f(a,b,c,x:int):
2     return a*x**2+b*x+c
3 for a in range(-100,101):
4     for b in range(-100,101):
5         for c in range(-100,101):
6             if
7                 print("a=",a,"b=",b,"c=",c)
```

Ligne 6 : « if (f(a,b,c,-1)==1 and f(a,b,c,1)==7 and f(a,b,c,3)==5) : »

Le programme donne $a=-1$, $b=3$ et $c=5$.

On ne peut pas être certain d'avoir trouver tous les triplets (a,b,c) pour l'une des raisons suivantes, une seule étant suffisante :

• le programme ne cherche que des valeurs entières de a, b et c alors qu'à priori a, b et c sont réels donc peuvent être non entiers

• le programme ne verra pas des triplets (a,b,c), s'il en existe, dont l'un au moins des nombres appartient à $]-\infty;0[\cup]100;+\infty[$.

Partie II Étude mathématique

Démontrer que : $\begin{cases} a-b+c=1 \\ a+b+c=7 \\ 9a+3b+c=5 \end{cases}$ puis en procédant par équivalence entre systèmes de trois équations à trois inconnues déterminer tous les triplets (a,b,c) possibles.

$A(-1;1)$, $B(1;7)$ et $C(3;5)$ appartiennent à la parabole représentative de f donc $f(-1)=1$, $f(1)=7$ et $f(3)=5$, or $f(x)=ax^2+bx+c$ donc on obtient :

$$\begin{cases} a(-1)^2+b(-1)+c=1 \\ a(1)^2+b(1)+c=7 \\ a(3)^2+b(3)+c=5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-b+c=1 \\ a+b+c=7 \\ 9a+3b+c=5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c=1-a+b \\ a+b+1-a+b=7 \\ 9a+3b+1-a+b=5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c=1-a+b \\ 2b+1=7 \\ 8a+4b+1=5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c=1-a+b \\ 2b=6 \\ 8a+4b=4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c=1-a+b \\ b=3 \\ 8a+4(3)=4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c=1-a+b \\ b=3 \\ 8a=-8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c=1-a+b \\ b=3 \\ a=-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c=1+1+3 \\ b=3 \\ a=-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=3 \\ c=5 \end{cases}$$

Il existe un et seul triplet (a,b,c) répondant à la question : $(-1{,}3{,}5)$ d'où existence et unicité de f puis existence et unicité de $\mathcal{P}$.

Partie III Examen d'une cocyclicité éventuelle

On admet qu'il existe une et une seule parabole passant par A, B et C, représentation graphique de f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-x^2+3x+5$

1. Déterminer les coordonnées du sommet S de la parabole $\mathcal{P}$.

On a $S(\alpha,\beta)$ avec $\alpha=-\frac{b}{2a}$ et $\beta=f(\alpha)$.

$-x^2+3x+5$ est de la forme ax^2+bx+c avec $a=-1$, $b=3$ et $c=5$, on a :

$$\alpha=\frac{-b}{2a}=\frac{-3}{2(-1)}=\frac{-3}{-2}=\frac{3}{2}$$

$$\beta = f(\alpha) = f\left(\frac{3}{2}\right) = -\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{3}{2}\right) + 5 = -\frac{9}{4} + \frac{9}{2} + 5 = \frac{-9}{4} + \frac{18}{4} + \frac{20}{4}$$
$$= \frac{-9 + 18 + 20}{4} = \frac{29}{4}$$

On a donc :

$$S\left(\frac{3}{2}\,;\frac{29}{4}\right)$$

2. Les points A, B, S et C sont-ils cocycliques ? Justifier.